Komplex Számok

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Definíció

Vegyük a legegyszerűbb másodfokú egyenletet aminek nincs valós megoldása

$$z^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

Ennek megoldásai legyenek i az imaginárius egység (képzeletbeli szám) és $-i$. Ebből következik, hogy $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Definíció

Vegyük a legegyszerűbb másodfokú egyenletet aminek nincs valós megoldása

$$z^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

Ennek megoldásai legyenek i az imaginárius egység (képzeletbeli szám) és $-i$. Ebből következik, hogy $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Így a

$$(z - \alpha)^2 + \beta = 0, \quad \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R} \tag{2}$$

egyenletnek is van megoldása:

$$z_1 = \alpha + i\sqrt{\beta}, \text{ és a } \quad z_2 = \alpha - i\sqrt{\beta}$$

Definíció

Sőt, a teljesen általános

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0 \tag{3}$$

egyenlet is a (2) alakba írható.

Definíció

Sőt, a teljesen általános

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0 \tag{3}$$

egyenlet is a (2) alakba írható.
Így kapjuk a (4) egyenletre a

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

megoldóképletet, arra az esetre is, ha diszkrimináns negatív.

Példa

Adjuk meg a

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \tag{4}$$

egyenlet megoldásait a komplex számok halmazán a megoldóképlet segítségével!

Példa

Adjuk meg a

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \tag{4}$$

egyenlet megoldásait a komplex számok halmazán a megoldóképlet segítségével!

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i,$$

ahol kihasználtuk, hogy $(4i)^2 = -16$.

Definíció

A másodfokú egyenleteknek a megoldása mindig

$$\color{red}{z} = \underbrace{a}_{\text{valós rész}} + \underbrace{b}_{\text{képzetes rész}} \cdot i$$

alakba írható. A képzetes és valós rész alkotják a komplex számot. Ezt hívjuk a komplex szám algebrai alakjának.

Jelölés: Re $z=$ valós rész, Im $z=$ képzetes rész.

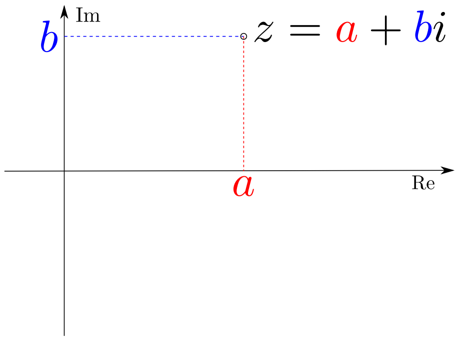
Legyen $\mathbb{C} := \{a + bi : a,b \in \mathbb{R}\}$.

A komplex számok testet alkotnak: a

$$a \cdot z + b = c$$

egyenlet minden $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ számra megoldható.

A komplex sík



A komplex számok ábrázolhatók a komplex síkon. Ahol az egyik tengely a valós (Re), a másik tengely a képzetes (Im) számokat ábrázolja.

Alapműveletek komplex számokkal

A komplex számok körében értelmezett a négy alapművelet. Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$ illetve $z_2 = a_2 + ib_2$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Alapműveletek komplex számokkal

A komplex számok körében értelmezett a négy alapművelet. Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$ illetve $z_2 = a_2 + ib_2$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

A szorzás elvégzéséhez kell az $i^2 = -1$ összefüggés:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

A $z = a + bi$ szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

A $z = a + bi$ szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

A konjugálás onnan jön, hogy a megoldó képlet

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

miatt ha egy komplex szám gyöke egy másodfokú egyenletnek akkor a komplex konjugáltja is az.

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

A $z = a + bi$ szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

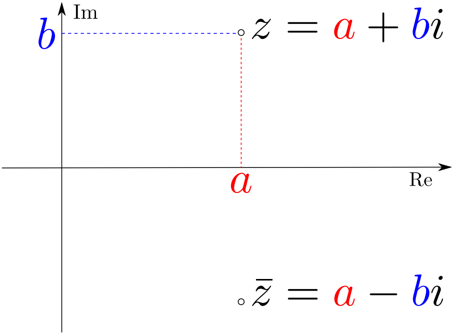
A konjugálás onnan jön, hogy a megoldó képlet

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

miatt ha egy komplex szám gyöke egy másodfokú egyenletnek akkor a komplex konjugáltja is az.

A komplex számból és konjugáltjából kifejezhető a komplex szám valós és képzetes része, hiszen $\frac{z+\bar{z}}{2} = a$ és $\frac{z-\bar{z}}{2i} = b$.

A komplex sík II

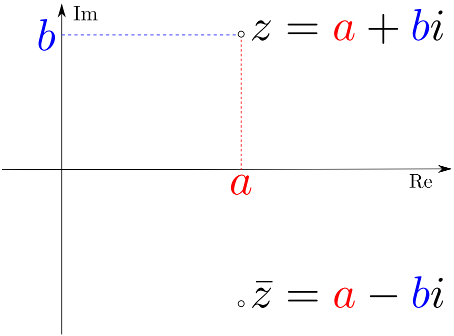


A konjugált a komplex szám tükörképe a valós tengelyre. A

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

a Pitagorasz tétel miatt a z távolságnégyzete az origótól.

A komplex sík II



A konjugált a komplex szám tükörképe a valós tengelyre. A

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

a Pitagorasz tétel miatt a z távolságnégyzete az origótól.

Alapműveletek komplex számokkal - Osztás

Az osztás elvégzése algebrai alakban kicsit nehézkes, de ha a nevező komplex konjugáltjával bővítek akkor algebrai alakot kapok.

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 - i^2 b_1 b_2 - ia_1 b_2 + ib_1 a_2}{{a_2}^2 - (ib_2)^2} =$$

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Példák

Példa: Számítsuk ki a $3+6i$ és a $4+7i$ számok szorzatát!

$$(3+6i)(4+7i) = 12 + 42i^2 + 24i + 21i = -30 + 45i$$

Példák

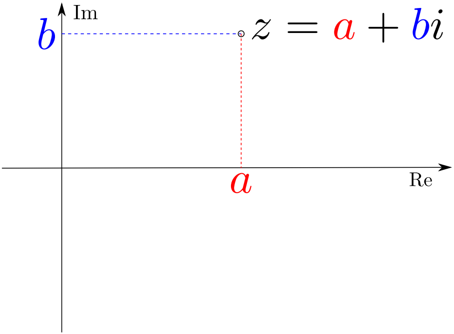
Példa: Számítsuk ki a $3+6i$ és a $4+7i$ számok szorzatát!

$$(3+6i)(4+7i) = 12 + 42i^2 + 24i + 21i = -30 + 45i$$

Példa 2: Számítsuk ki a $2+3i$ és a $4-2i$ számok hányadosát!

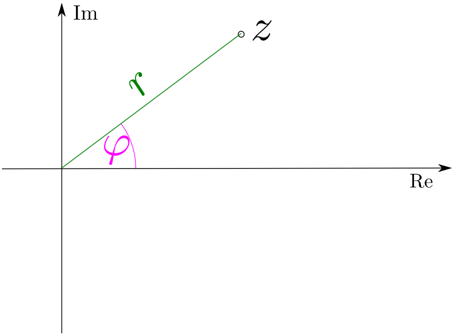
$$\frac{2+3i}{4-2i} = \frac{2+3i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{8-6+i(4+12)}{4^2+2^2} = \frac{2+16i}{20} = \frac{1}{10} + i\frac{4}{5}$$

A komplex sík



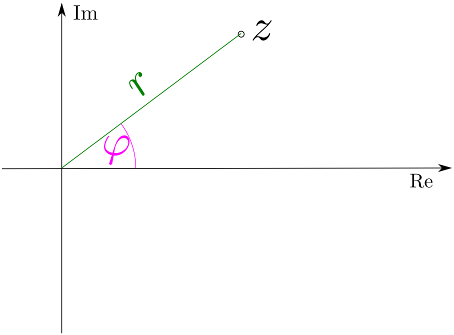
A komplex számok ábrázolhatók a komplex síkon. Ahol az egyik tengely a valós (Re), a másik tengely a képzetes (Im) számokat ábrázolja.

Komplex szám trigonometrikus alakja



Egy komplex számot nemcsak a valós és képzetes részével adhatunk meg, hanem megadhatjuk ehelyett az origótól vett távolságát $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$-t amit a polár koordináta rendszer jelölései miatt szoktuk r-nek is jelölni, és a valós tengely pozitív felével bezárt szögét, aminek jele: φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Komplex szám trigonometrikus alakja II



Ezek segítségével használhatjuk az ún. trigonometrikus alakot is

$$z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$$

mivel $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ illetve $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ definíció szerint (ahol z algebrai alakja: $z = a + bi$).

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Tehát egy komplex számmal való szorzás az abszolult értékkel való „nyújtást" és a szöggel való forgatást jelent.

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Példa

Számítsuk ki a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ és a $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ számok szorzatát!

Példa

Számítsuk ki a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ és a $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ számok szorzatát!

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 8i$$

Alapműveletek komplex számokkal - Hatványozás

A magas kitevőjű hatványozást nem érdemes $a + ib$ alakban végezni, ugyanis míg a

$$z^n = (a + ib)^n$$

kifejezést magas hatványra csak a binomiális tétellel bontható ki, addig

Alapműveletek komplex számokkal - Hatványozás

A magas kitevőjű hatványozást nem érdemes $a + ib$ alakban végezni, ugyanis míg a

$$z^n = (a + ib)^n$$

kifejezést magas hatványra csak a binomiális tétellel bontható ki, addig

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

igen könnyen számolható.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 2019-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 2019-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Írjuk át trigonometrikus alakra a számot.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 2019-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Írjuk át trigonometrikus alakra a számot.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Ezután

$$z^{2019} = \sqrt{2}^{2019} \left(\cos\left(\frac{14133\pi}{4} \right) + i \sin\left(\frac{14133\pi}{4} \right) \right) =$$

$$2^{1009}\sqrt{2}(\cos(\frac{14128}{8}2\pi + \frac{5\pi}{4}) + i \sin(\frac{14128}{8}2\pi + \frac{5\pi}{4})$$

$$= 2^{1009}\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i \sin(\frac{5\pi}{4})) = -2^{1009} - 2^{1009} i$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül.
Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \end{cases}$$

Tehát minden komplex számnak n darab n-edik gyöke van, melyek egy orgió középpontú szabályos n szöget alkotnak.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Innen:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$, azaz a három gyök:

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Innen:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$, azaz a három gyök:

- k=0-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
- k=1-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right)$
- k=2-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)$

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

A gyökök ismeretében a gyöktényezős alak:
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
Így most a gyöktényezős alak: $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

A gyökök ismeretében a gyöktényezős alak:
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
Így most a gyöktényezős alak: $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

És valóban a másodfokú kifejezés egy felbontását kapjuk, hiszen
$(x+1-i)(x+1+i) = x^2 + x(1+i+1-i) + (1-i)(1+i) = x^2 + 2x + 2$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három lesz.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három lesz.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba:
$8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három lesz.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba:
$8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$.

Innen a köbgyökök:

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három lesz.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba:
$8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$.

Innen a köbgyökök:

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$.

Innen a megoldások: $z_1 = 2$
$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$
$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetes részük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetes részük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetes részük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$,

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetes részük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$,

a képzetes részre vonatkozó egyenlet $b = 1$. Ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + \sqrt{1 + a^2} = 3$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetes részük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$,

a képzetes részre vonatkozó egyenlet $b = 1$. Ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + \sqrt{1 + a^2} = 3$.

Innen:

$$\sqrt{1 + a^2} = 3 - a$$

A megoldáshoz nincs más választásunk, mint mindkét oldalt négyzetre emelni, kikötés: $3 - a \geq 0$.

Példa - folyt.

Vigyázzunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ha elfelejtünk kikötni, ezért a kapott gyököket illik ellenőriznünk!

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a^2} &= 3-a \\ 1+a^2 &= 9-6a+a^2 \\ 6a &= 8 \end{aligned}$$

Példa - folyt.

Vigyázzunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ha elfelejtünk kikötni, ezért a kapott gyököket illik ellenőriznünk!

$$\begin{aligned}\sqrt{1+a^2} &= 3-a\\ 1+a^2 &= 9-6a+a^2\\ 6a &= 8\end{aligned}$$

Ellenőrizzük az $a = \dfrac{4}{3}$ gyököt!

$$\frac{4}{3}+\sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}+\frac{5}{3} = 3,$$

Példa - folyt.

Vigyázzunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ha elfelejtünk kikötni, ezért a kapott gyököket illik ellenőriznünk!

$$\begin{aligned} \sqrt{1+a^2} &= 3-a \\ 1+a^2 &= 9-6a+a^2 \\ 6a &= 8 \end{aligned}$$

Ellenőrizzük az $a = \dfrac{4}{3}$ gyököt!

$$\frac{4}{3} + \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3,$$

azaz nem hamis gyök a $\dfrac{4}{3}$. Innen az eredeti egyenlet megoldása:

$$z = \frac{4}{3} + i.$$